Mr :Khammour.K **Série n°1: Limite et continuité** **4ème Sc-exp et Math** **Septembre 2016**

Exercice n°1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^3}{x^2+2x-3}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{5x^2+4}-5}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin x-\sqrt{3}}{2\cos x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{4x+1}}{1+\sqrt{4x+1}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-2x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2}{\sin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|x|-2}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-1}{\sqrt{9x^2-x+3}}$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-1}{x-|x+1|+1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tgx}{\sin 2x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x^3-2x^2+x-1}{x^3-1}\right)$

Exercice n°2 :

Montrer que l'on peut déterminer des réels m et M que l'on précisera tels que $\forall x\in IR : m\le\dfrac{1}{2-\sin x}\le M$.

En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{2-\sin x}\right)$

Exercice n°3 :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice n°4 :

On considère la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$;

1) Montrer que $|f(x)-3|\le\dfrac{4}{x-1}$.
2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice n°5 :

Déterminer les limites éventuelles des fonctions f en $+\infty$ et $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats :

1) $f(x)=x-1+\sqrt{x^2-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}$ 3) $f(x)=\dfrac{x-1+\sqrt{x^2-1}}{x}$ 4) $f(x)=\dfrac{4x-1}{\sqrt{9x^2-x+3}}$

5) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{4x+1}}{1+\sqrt{4x+1}}$ 6) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^3+2x-3}$ 7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}$ 8) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x^3-2x^2+x-1}{x^3-1}\right)$

Exercice n°6 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-x} & \text{si } x\in]-\infty,0[\cup[1,+\infty[\\ \dfrac{x^2}{2x-1} & \text{si } x\in[0,1[\end{cases}$

1) a) Déterminer le domaine de f.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2) Etudier la continuité de f en 0 et en 1.

Exercice n°7 :

On pose $g(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-5x+1}}{x-1}$.

1) Déterminer le domaine D de g puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$.
2) Etudier la continuité de g sur D.

Exercice n°8 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x-1||x|}{x\left(2x^2+x-3\right)} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 1 et en 0.
2) Trouver les intervalles sur les quels f est continue.

Exercice n°9 :

Déterminer un prolongement par continuité de la fonction f en a :

$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$; a = 1 ; $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x+2}$ a= -2 ; $f(x)=\dfrac{|x|-3}{x^2+3x}$ a= -3 ; $f(x)=\dfrac{8x^2-2}{x-|x-1|}$ $a=\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 5x}$ $a=0$; $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 4x}$ $a=\dfrac{\pi}{4}$ $f(x)=\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}$ $a=-\dfrac{\pi}{3}$

Exercice n°10 :

Soit la fonction f définie sur IR\{1} par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x-1} & \text{si } x\in IR_-^*\setminus\{1\} \\ f(x)=\sqrt{x^2-2x}+x \text{ si } x\leq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x\in]0,1[: \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\leq f(x)\leq\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$
   b) En déduire que f est continue en 0.
   c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) On pose $u(x)=\dfrac{\pi(x-1)}{x}$; $v(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ et $w(x)=\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$ pour $x\in IR_-^*\setminus\{1\}$.
   a) Vérifier que pour tout $x\in IR_-^*\setminus\{1\}$ $f(x)=w(x).(vou)(x)$.
   b) En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 1.
   c) A l'aide de g montrer que l'équation $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=3\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle]1,2[une solution α.

Exercice n°11 :

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = -\dfrac{x}{2} + 3\sqrt{x} - \dfrac{4}{5} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x^2 - 6x + 5} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en 0.
2) b) Montrer que f est continue sur IR.
3) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4) b) Déterminer $\lim\limits_{x \to \infty} \cos\left(\dfrac{x-4}{x^2 - 6x + 5}\right)$.
5) a) Montrer que f(x) =0 admet une solution unique α sur [0,1].
6) b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$ et déterminer le nombre de solution de l'équation f(x) =0 sur $[0,+\infty[$.
7) c) Déterminer $f\left([0,9]\right)$; $f\left([9,+\infty[\right)$ et $f\left([0,+\infty[\right)$

Exercice n°12 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) + 3 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^3 + 3x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$: $-x^2 + 3 \leq f(x) \leq x^2 + 3$.
   b) Déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.
2) a) Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$.
   b) Déterminer $f\left([1,3]\right)$.
3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 8$ admet une solution unique $\alpha \in]1,2[$.
   b) Vérifier que $\alpha^3 + 3\alpha - 5 = 0$.

Exercice n°13:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$ et (C_f) la courbe de la restriction f sur $I =]-\infty, 0[$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est bien définie sur I.
   b) Montrer que f est continue sur I.
2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et interpréter le résultat obtenu.
3) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   b) Déduire la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer la position relative de $\left(C_f\right)$ par rapport à D.

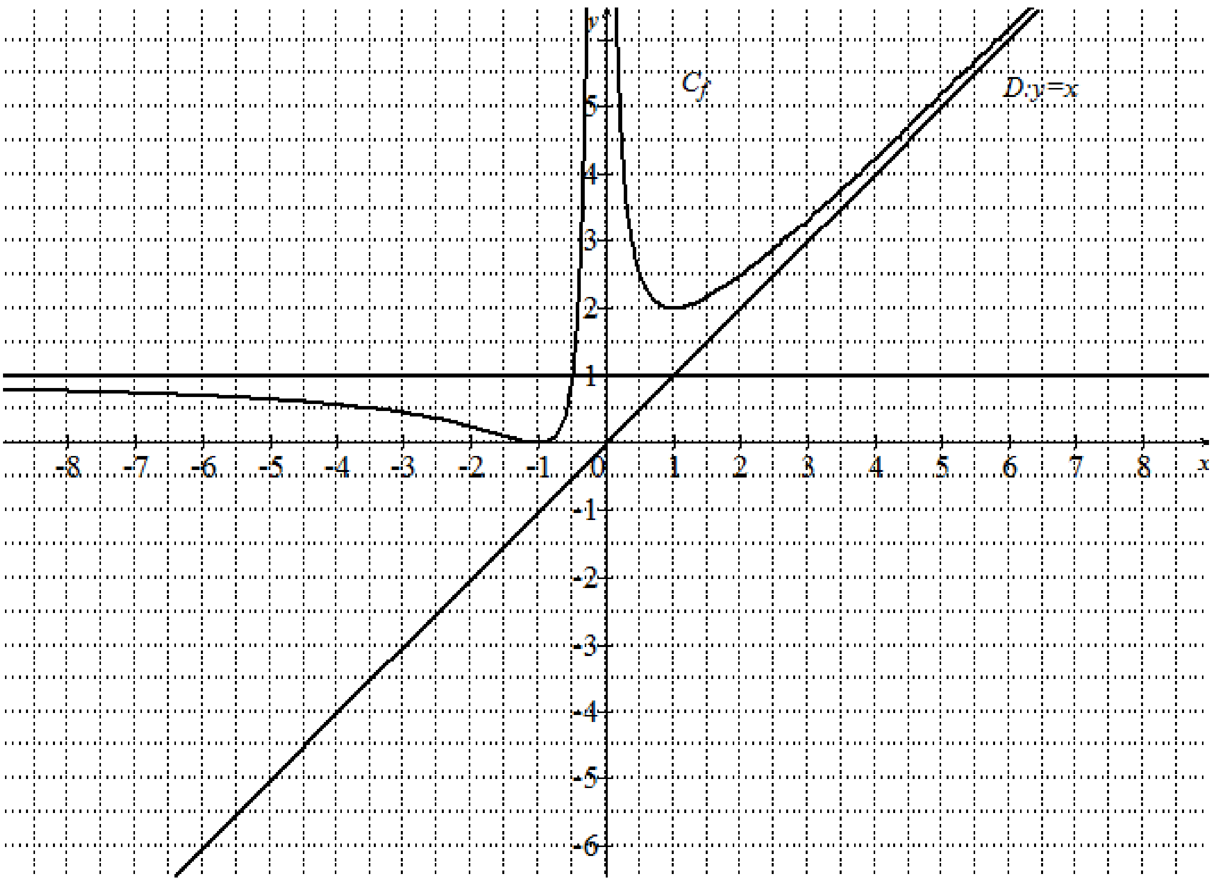
4) Etudier les variations de f .

5) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans I une solution unique a et que $a \in \left]-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right[$

b) Tracer $\left(C_f\right)$ et D.

Exercice n°14 :

Dans le graphique ci-dessous , on a présenté la courbe $\left(C_f\right)$ d'une fonction f définie sur IR*.La droite $\Delta : y=x$ est une asymptote à $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$ et l'axe des ordonnées est une asymptote à $\left(C_f\right)$ à droite et à gauche de 0
Utiliser le graphique pour répondre :



1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{f(x)}$;$\lim\limits_{x\to0} f(x)\sin\left(\frac{f(x)}{x}\right)$.

2) Montrer que la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{\frac{1}{f(x)}}$ est continue sur IR*\{-1}.

3) La fonction g admet –elle un prolongement par continuité en 0.